第3講　和の記号 Σ，階差数列

PART1　和の記号 Σ

要点 ①　和の記号 Σ

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ を，記号 $\sum$ (シグマ)を用いて

と表す。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ において，k は 1 から n までの整数値をとる変数である。この 1 や n を変化させることにより，数列 $\{a_n\}$ のある部分の和を表すことができる。

例　$\displaystyle\sum_{k=2}^{5} a_k =$

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項(一般項)が n の式で表されるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ の a_k は k の式で表される。この k の式に，1 から n まで代入することにより，各項を列挙した和の形で表すことができる。

例　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=(2\cdot\quad-1)+(2\cdot\quad-1)+(2\cdot\quad-1)+\cdots\cdots+(2\cdot\quad-1)$

$$=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$$

また，各項を列挙した和の形で表された式を，$\sum$ を用いて表すことができる。

例　$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=\displaystyle\sum_{k=}$

※ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ のように，k の代わりに i や j などの文字を用いることがある。

※　$\sum$ を使った和の書き表し方は一通りではない。

たとえば，$3+4+5+6+7=\displaystyle\sum_{k=3}^{7} k=\sum_{k=1}^{5}$　　　である。

要点② Σ を用いて表された等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n =$

である。よって，$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ は，初項 a，公比 r の等比数列の，初項から第 n 項までの和を表す。

したがって，次のことが成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

例 $\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 4^{k-1} = \qquad =$

1 (1) 次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i) $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$　　(ii) $\sum_{k=1}^{4} (3k+1)$

(2) 次の式を，和の記号 Σ を用いて表せ。

(i) $2+4+6+8+10$　　(ii) $3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2$

(3) 和 $\sum_{k=1}^{n} (-3)^{k-1}$ を求めよ。

Point Pickup

和の記号 Σ

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

Σ で表された等比数列の和

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (r \neq 1)$$

第 3 講 PART1 確認問題

1 $\sum_{k=2}^{n+1} a_k = \boxed{\text{ア}}$

$\boxed{\text{ア}}$ は，次の①～④のうちから選べ。

① $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$

② $a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_n$

③ $a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{n-1}$

④ $a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{n+1}$

2 $\sum_{k=1}^{4}(2k+3)=5+\boxed{\text{イ}}+9+\boxed{\text{ウエ}}$

3 $3+6+9+12+15$ を和の記号 Σ を用いて表すと，

$\sum_{k=1}^{\boxed{\text{オ}}} \boxed{\text{カ}}\,k$ となる。

4 $5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$ を和の記号 Σ を用いて

表すと，$\sum_{k=\boxed{\text{ケ}}}^{\boxed{\text{キク}}} k^2$ となる。

5 $\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}=\dfrac{1-\left(\boxed{\text{コサ}}\right)^n}{\boxed{\text{シ}}}$

第 3 講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σ

1　(1)　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(i)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k$　　(ii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (3k+1)$

(2)　次の式を，和の記号 Σ を用いて表せ。

(i)　$2+4+6+8+10$　　(ii)　$3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2$

(3)　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-3)^{k-1}$ を求めよ。

[解答]

(1)(i)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}$

(ii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (3k+1) = (3\cdot1+1)+(3\cdot2+1)+(3\cdot3+1)+(3\cdot4+1)$

$= 4+7+10+13$

(2)(i)　$\displaystyle 2+4+6+8+10 = \sum_{k=1}^{5} 2k$

(ii)　$\displaystyle 3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2 = \sum_{k=3}^{n} k^2$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-3)^{k-1} = \frac{1\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = \frac{1}{4}\{1-(-3)^n\}$

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：④

[解説]

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} a_k = \boldsymbol{a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{n+1}}$ [A]

[A]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$
$=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$

2 **[正解]** イ：7，ウエ：11

[解説]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(2k+3)=(2\cdot1+3)+(2\cdot2+3)$
$+(2\cdot3+3)+(2\cdot4+3)$ [B]
$=\boldsymbol{5+7+9+11}$

[B]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$
$=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$

3 **[正解]** オ：5，カ：3

[解説]

$3+6+9+12+15$

$=3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+3\cdot5$

$=\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 3k}$ [C]

[C]　数列 3，6，9，12，15 の第 k 項が $3k$ である。

4 **[正解]** キク：10，ケ：5

[解説]

$5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$

$=\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=5}^{10} k^2}$ [D]

[D]　k^2 の k に 5 から 10 まで代入して加えたものである。

5 [正解] コサ：-2，シ：3

[解説]

$$\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}$$

$$=1+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots\cdots+(-2)^{n-1}$$

これは，初項 1，公比 -2 の等比数列の初項から第 n 項までの和を表すから，

$$\sum_{k=1}^{n}(-2)^{k-1}=\frac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$$ [E]

$$=\frac{\mathbf{1-(-2)^n}}{\mathbf{3}}$$

[E]　初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和は，$r\neq 1$ のとき，

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$